

レヴィ・フライトと呼ばれる物質の異常拡散の微視的な仕組みを数理的に解明

～ブラウン運動とは異なる現実世界のランダムな拡散を理論化～

研究成果のポイント

1. レヴィ・フライトと呼ばれる異常拡散がなぜ現れるのかを、生物物理系(微生物)の微視的なモデルを使って理論的に解明しました。これまでレヴィ・フライトを微視的に説明できる理論はありませんでした。
2. 異常拡散は、金融市場や地震の発生、生物の移動などさまざまな系で観測される現象です。
3. 今回の手法は、幅広い分野で重要な異常拡散の理解・制御に役立つ可能性があります。

国立大学法人筑波大学システム情報系の金澤輝代士助教(前東京工業大学助教)は、スイス連邦工科大学ローザンヌ校の佐野友彦研究員、インペリアル・カレッジ・ロンドンのアンドレア・カイロリ研究員、ロンドン大学クイーン・メアリー校のアドリアン・パウレ主任講師と共同で、**アクティブマター系**(注1)における物質の拡散現象を理論的に研究し、**レヴィ・フライト**(注2)と呼ばれる**異常拡散**(注3)があらわれる**微視的**(注4)な数理構造を解明しました。

熱平衡状態の水に小さな粒子を浮かべると、その粒子はランダムに動きながら徐々に拡散する**ブラウン運動**(注5)を示します。しかし、通常の生物系では、さまざまな生命活動が営まれている結果として、水は熱平衡系から大きくはなれた非平衡状態になります。その結果、通常のブラウン運動とは著しく異なる異常拡散が現れます。例えば、変位分布が**ベキ分布**(注6)にしたがうレヴィ・フライトはその代表例で、経験的に多くの拡散現象を説明してきました。例えば、金融市場での暴騰・暴落や、地震のような間欠性を伴う現象も、広い意味では異常拡散、そしてレヴィ・フライトと関係があると考えられています。

しかし、それではなぜ、レヴィ・フライトが複雑な実世界を記述できるのでしょうか？ レヴィ・フライトは非平衡系の拡散モデルであり、その微視的な発生機構を理論的に解明することは困難でした。そこで、本研究では、**遊走微生物**(注7)で構成されたアクティブマター系を題材に選び、レヴィ・フライトが実世界で現れることを微視的に説明できる理論体系を構築しました。具体的には、水中で遊走微生物(大腸菌やクラミドモナス、ボルボックスなど)が遊泳している系を考え、そこに小さな粒子を置きます。そして、微生物が作り出す流れ場を流体力学中の**力学系**(注8)としてモデル化しました。さらに、この力学系に対して統計物理学の**分子運動論**(注9)の手法を用い、レヴィ・フライトが現れることを理論的に示しました。

拡散現象はアクティブマター系に限らず、上述のようにさまざまな系で観測されます。そうした系における拡散を理解し、制御に繋げることは重要な問題となっています。本研究を通じて、異常拡散の仕組みを解き明かす枠組みを構築しました。アクティブマター系を超え、さまざまな系の異常拡散を微視的な視点から理解・制御することにつながる成果が期待される成果です。

本研究成果は3月19日午前1時(日本時間)に英科学誌「ネイチャー(電子版)」に掲載される予定です。
※本研究は科学研究費若手研究(B)(16K16016、18K13519)、学術振興会特別研究員(PD)(16J05315)、並びに1851年博覧会王立委員会からの助成を受けて行われました。また、本研究の数値解析は京都大学基礎物理学研究所のスーパーコンピュータXC40上で行われました。

研究の背景

(1) 通常拡散とブラウン運動

熱平衡状態の水に小さな粒子(以下トレーサー粒子と呼ぶ)を浮かべた時、その粒子はランダムに動き、徐々に拡散していきます。酔っ払いの動きのようなこの現象は酔歩(すいほ)、またはブラウン運動(図1a)と呼ばれ、さまざまな分野(化学・生物学・経済学・金融工学)における拡散現象のモデル化に応用されてきました。確率論の基礎定理である中心極限定理(注10)によれば、多くの拡散現象での移動距離(以下、変位と呼ぶ)は最終的に正規分布に従う事が証明でき、ブラウン運動はその代表例であることが分かっていました。

このブラウン運動の起源を「微視的に理解する」、すなわち、系を構成する最小要素である分子・原子のレベルから理解することを試みてみましょう(図1b)。分子運動論によれば、ナノメートルサイズの水分子がトレーサー粒子にランダムに衝突することが、ブラウン運動の微視的な起源であるとされます。そして、熱平衡状態の多数の水分子の動きを考慮することで、ブラウン運動の統計則を理論的に理解することが出来ます。この理論を応用することで、アボガドロ数のような重要な物理量を高精度に測定することが歴史的には可能となりました。この様に、ノイズの起源を微視的に理解し、定量化することは物理学にとって非常に重要な営みでした。

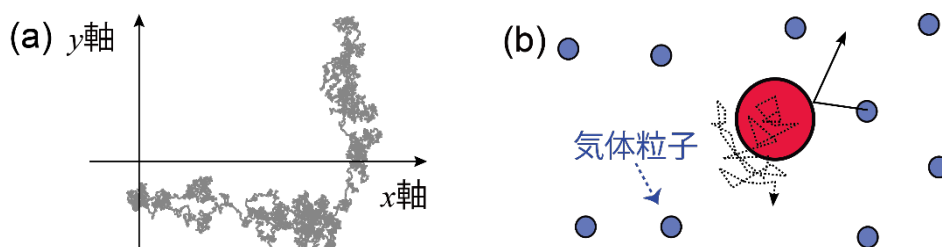


図 1 : (a) 通常拡散の代表例であるブラウン運動。微小ジャンプが累積した結果として拡散する。

(b) ブラウン運動の微視的理論。希薄気体がトレーサー粒子に衝突して生じる。

(2) 異常拡散とレヴィ・フライト

一方、より複雑な実世界に目を向けてみると、ブラウン運動とは大きく異なる拡散現象も存在します。レヴィ・フライトはそのような異常拡散の代表例の一つです(図2a)。レヴィ・フライトの特徴は、物質が拡散する際にまれに非常に大きな変位を伴う事です。この結果、小さな変位が積み重なって形成されるブラウン運動とは大きく異なり、レヴィ・フライトに従うトレーサー粒子の変位分布はベキ分布にしたがうことが知られていました。

レヴィ・フライトは経験的に多くの異常拡散を説明してきました。例えば、金融危機中の価格変動(図2b)や生物の移動パターンなどは、まれに非常に大きな変位を伴うため、レヴィ・フライトによってモデル化できることが経験的に知られていました。そこで、「なぜレヴィ・フライトが複雑な実世界を記述できるのだろうか?」という疑問が自然に生じます。実は、この疑問に満足に回答できる物理学としての微視的な理論はこれまでありませんでした。レヴィ・フライトは非平衡系における拡散現象の数理モデルで、理論解析が非常に難しいからです。また、レヴィ・フライトを示す微視的な力学系モデルが確立しておらず、理論解析の土壌が整っていなかったこともレヴィ・フライトの理論的な説明を困難にする要因でした。

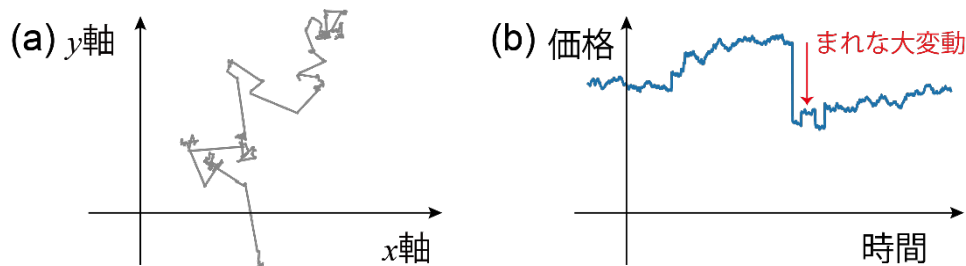


図 2 : (a) 異常拡散の代表例であるレヴィ・フライト。まれに大きなジャンプが生じながら拡散する。

(b) レヴィ・フライトの応用例：株価や為替の価格は金融危機の時にまれな大変動を示す。この様な挙動を捉えるモデルの有力候補の1つとして、レヴィ・フライトの様な異常拡散モデルが挙げられる。

研究内容と成果

そこで本研究では、レヴィ・フライトが実世界で現れることを証明できる微視的な理論体系の構築を目指し、遊走微生物で構成されるアクティブマター系に着目しました(図3a)。遊走微生物は水中である程度まっすぐに泳ぎ、ランダムに泳ぐ方向を変えることが知られています。この水にトレーサー粒子を浮かべると、微生物が引き起こす流れ場により、トレーサー粒子がレヴィ・フライトを示すことを証明しました(図3b)。

具体的には、統計力学で発展してきた気体分子運動論の数理的手法(図1b)を、アクティブマター系に拡張しました。従来の気体分子運動論では、気体分子同士の2体散乱理論に基づいて希薄気体をボルツマン方程式によってモデル化しています。研究グループは、この枠組みを拡張し、アクティブマター系に浮かぶトレーサー粒子の動きをモデル化しました。つまり、微生物が引き起こす流れ場によるトレーサー粒子の動きを計算するため、微生物とトレーサー粒子の2体間の散乱がランダムに発生するという確率過程のモデルを構築しました。さらに、このモデルに基づいてトレーサー粒子の動きを解析し、トレーサー粒子がレヴィ・フライトを示すことを理論的に示しました(図3b)。

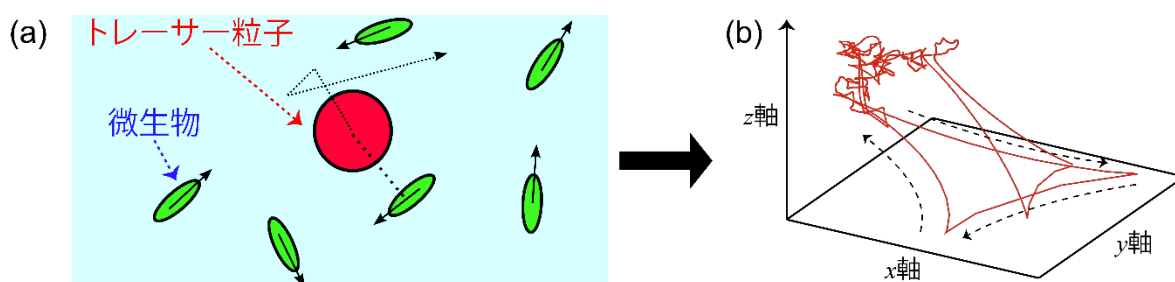


図 3: (a)アクティブマター系のレヴィ・フライトの微視的理論。微生物が引き起こす流れ場によってトレーサー粒子が異常拡散する。(b) モデルのシミュレーションの結果。赤線はトレーサー粒子の軌跡であり、まれにループしながら大きな変位を示していることが分かる。

今後の展開

本理論は、異常拡散を微視的に明らかにする枠組みで、アクティブマター系を超えてさまざまな異常拡散の現象を統一的に理解するために役立つ可能性があります。例えば、流体中の乱流輸送や社会現象(人の移動や金融市場の株価・為替変動)において、異常拡散が発生することが経験的に知られています。そのような異常拡散を微視的な視点から科学的に理解し、更にはどのように外部から系に介入を行えば拡散を制御(つまり、拡散を抑制、促進)できるかについて、本研究は示唆を与える可能性があります。

用語解説

アクティブマター系

注1) レヴィ・フライト

1回のステップでの変位がベキ分布に従うランダム・ウォークのモデル。異常拡散の代表例で、まれに非常に大きな変位を生じる特徴がある。

注2) 異常拡散

通常の拡散現象とは数学的に大きく異なる拡散現象の総称。代表例としてレヴィ・フライトが挙げられる。

注3) 微視的

系を構成する最小要素から出発し、全ての構成要素の相互作用を考慮した上で系全体の理解を試みる理論のことを「微視的な理論」と呼ぶ。例えばブラウン運動の微視的な理論である分子運動論では、分子・原子を系の最小構成要素として考える。本研究の場合は、遊走微生物の集団を最小構成要素としてモデル化した。

注4) ブラウン運動

変位が正規分布に従う確率過程の標準的なモデル。通常拡散の代表例で、小さな変位が徐々に積み重なった

結果として生じる。

注5) ベキ分布

変位分布の裾野がベキ乗則に従う分布(図4)。 $\Delta x \rightarrow \infty$ で確率分布が $P(\Delta x) \sim |\Delta x|^{-\alpha}$ の形に従う。

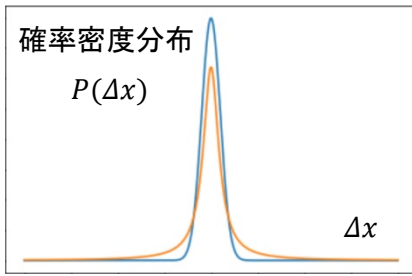


図4: 正規分布(青)とベキ分布(橙、 $\alpha = 2$)。ベキ分布の方が広い裾野を持つため、たまに非常に大きな値を取る。

注6) 遊走微生物

大腸菌、クラミドモナス、ボルボックスといった微生物は、あるきまった条件下では直線的な泳ぎとランダムな方向転換を繰り返すことが知られている。本研究ではそのような微生物を遊走微生物と呼んでいる。

注7) 力学系

高次元の微分方程式として記述されるシステム。ニュートン力学に従う物理系(ハミルトン力学系)が代表例。

注8) 分子運動論

希薄な気体のマクロな性質を、系の最小単位の構成要素である原子・分子の動力学を記述する微視的な力学系から理解する枠組み。

注10) 中心極限定理

分散が有限の独立同分布に従う変数列は、十分多く和を取ると近似的に正規分布に従うことが知られている。この数学的な事実を証明する定理が中心極限定理である。本定理をより一般化すると、分散が発散する時は安定分布と呼ばれるベキ分布に従うことが知られている。レヴィ・フライトは安定分布を確率過程に自然に拡張した概念だと理解することができ、その振る舞いは長時間に渡って安定に継続することが分かる。

掲載論文

【題名】 Loopy Lévy flights enhance tracer diffusion in active suspensions

ループ型のレヴィ・フライトによってアクティブ懸濁液中のトレーサー拡散が促進される

【著者名】 Kiyoshi Kanazawa, Tomohiko G. Sano, Andrea Cairoli, Adrian Baule

【掲載誌】 ネイチャー(電子版) DOI:10.1038/s41586-020-2086-2

問い合わせ先

金澤 輝代士(かなざわ きよし)

筑波大学 システム情報系 助教

〒305-8572 茨城県つくば市天王台 1-1-1

関連 Web ページなど

- 金澤輝代士: <https://kzkiyoshi.wixsite.com/main>
- 佐野友彦: <https://tomohiko-s.wixsite.com/my-homepage>
- Andrea Cairoli: <https://www.linkedin.com/in/andrea-cairoli-b19930141/>
- Adrian Baule: <http://www.maths.qmul.ac.uk/~baule/>